Instituto Politécnico

Universidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de

Punto - Recta Plano

1º Año

Cód. 1102-16

Prof. Ma. Del Luján Martínez
Prof. Mirta Rosito
Prof. Noemí Lagreca
Dpto. de Matemática

Matemática

Masterización: RECURSOS PEDAGOGICOS

INTRODUCCIÓN

La palabra **geometría** está formada por dos raíces griegas geo (tierra) y metrón (medida) por lo tanto su significado etimológico es “la medida de la tierra”

Es una rama de la matemática que se ocupa de las propiedades de las figuras geométricas ; estudia idealizaciones del espacio en que vivimos, que son los **puntos**, las **rectas** y los **planos**, y otros elementos conceptuales derivados de ellos, como polígonos o poliedros entre otros.

PUNTO, RECTA Y PLANO

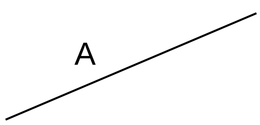
Los conceptos de ***PUNTO, RECTA*** y ***PLANO*** constituyen la base del gran edificio que conforma la Geometría. Se los conoce con el nombre de ***conceptos primitivos***, son ideas o abstracciones que no podemos definir con términos más sencillos o por otros términos ya conocidos.
Trabajaremos con conjuntos no vacíos de puntos en el espacio a los que llamaremos ***figuras*** .Algunos ejemplos de ellos son : los puntos, las rectas, los planos que convenimos en representar y nombrar de la siguiente forma:

- A los puntos los nombramos con letras minúsculas y los representamos indistintamente como muestra el ejemplo

•*a* × b

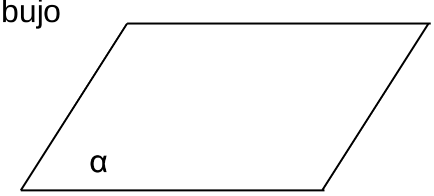
leemos: “punto *a*” leemos: “punto *b*”

- A las rectas las nombramos con letras mayúsculas y las representamos como muestra la figura



leemos: “recta A”

- A los planos los nombramos con letras del alfabeto griego y los representamos como en el dibujo



leemos: “plano α”

Algunas letras del alfabeto griego son:

α : alfa	ε : épsilon
β : beta	ω : omega
γ : gamma	ρ : rho
δ : delta	π : pi

El espacio, es el conjunto de todos los puntos. Utilizamos para nombrarlo, el símbolo R^3 que leemos *"erre tres".*

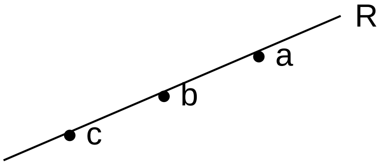
Problema

1) Confecciona un gráfico que cumpla simultáneamente con las siguientes condiciones:
    - un plano y llámalo β
    - una recta $R \subset \beta$, una recta $T \not\subset \beta$
    - un punto p que pertenezca a la recta T y no pertenezca al plano β

Puntos alineados

Diremos que dos o más puntos son **alineados (o colineales)** si pertenecen a una misma recta.

Ejemplo:



Como a, b y c pertenecen a R entonces a, b y c son colineales y recíprocamente.

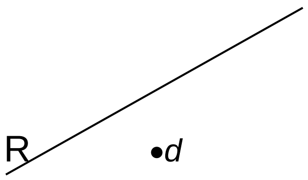
En símbolos:

$$a, b, c \in R \quad \Leftrightarrow \quad a, b, c \ \text{ son colineales}$$

Punto exterior a una recta

Dada una recta hay infinitos puntos en R^3 que no pertenecen a la misma.
A cada uno de ellos se lo denomina **punto exterior** a la recta

Ejemplo:



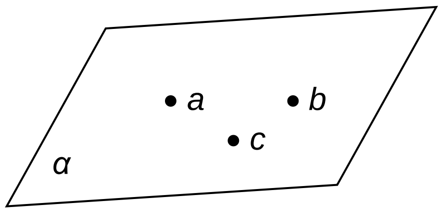
d es exterior a la recta ***R.***

En símbolos:

$$d \notin R \Leftrightarrow d \text{ es exterior a } R$$

Puntos coplanares

Diremos que dos o más puntos son **coplanares** si pertenecen a un mismo plano.



Como a, b y c pertenecen a α entonces a, b y c son coplanares y recíprocamente .

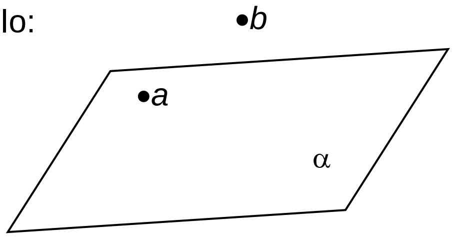
En símbolos:

$$a,b,c \in \alpha \quad \Leftrightarrow \quad a,b,c \text{ son coplanares}$$

Punto exterior a un plano

En el espacio hay infinitos puntos que no pertenecen a un plano. A cada uno de ellos se lo denomina **punto exterior al plano**

Ejemplo:



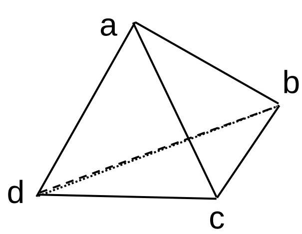
b es exterior al plano α.
En símbolos:

$$b \notin \alpha \Leftrightarrow b \text{ es exterior a } \alpha$$

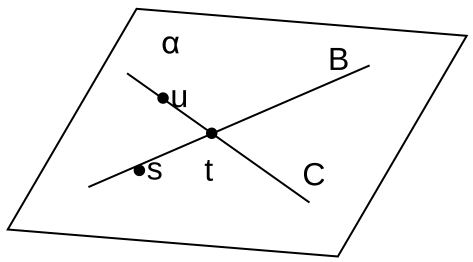
Problemas

2) Dibuja 4 puntos a ,b ,c y d tal que a, b y c sean colineales y a, b, c y d no lo sean.

3) El gráfico representa un tetraedro
Nombra:
- una terna de puntos coplanares
- un punto del plano al cual pertenecen los puntos *a¸ c* y *d,* márcalo en el dibujo



4) De acuerdo con la figura completa, empleando adecuadamente los símbolos $\in$; $\notin$; $\subset$ y $\not\subset$



s ....B B........... R^3

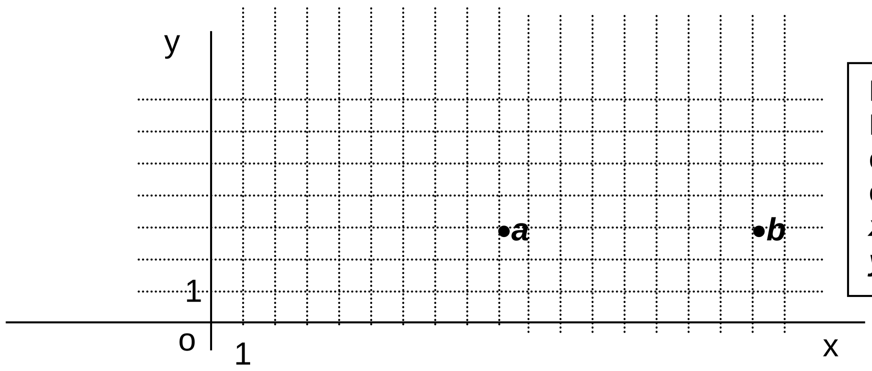
u............. C B........... α

u........... R^3 C .... α

•u

5) En el siguiente sistema de coordenadas hemos ubicado dos puntos *a* y *b*.

a) Determina las coordenadas de *a* y *b*.
b) Ubica tres puntos colineales con *a* y *b* y escribe sus coordenadas
c) Ubica dos puntos no alineados con *a* y *b* y escribe sus coordenadas.



Recuerda:
En un sistema de coordenadas a cada punto p le corresponde un par ordenado de números ***(x ; y)*** tal que ***x*** recibe el nombre de abscisa de p e ***y*** ordenada del punto p

POSTULADOS DE LA GEOMETRÍA EUCLIDEANA

Para poder ir construyendo el edificio de la geometría además de los conceptos primitivos se deben tener en cuenta los **postulados**

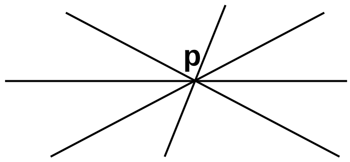
Euclides (306-283 a.C) : geómetra griego, fundó una Escuela de Matemática en Alejandría. Su obra monumental es “Elementos”, compuesta de 13 libros

¿Qué es un postulado?

Un POSTULADO *es una proposición evidente por sí misma y por lo tanto no necesita demostración*

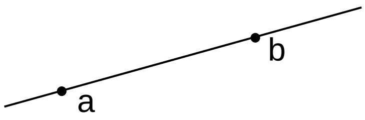
Los postulados en geometría son muy importantes en el proceso del razonamiento deductivo. Son comparables con las reglas de un juego .

♦ ***Por un punto pasan infinitas rectas***



♦ ***Existe una recta y solo una que pasa por dos puntos distintos***

Este postulado suele expresarse: “Dos puntos distintos determinan una recta a la cual pertenecen”



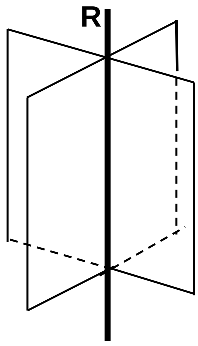
En símbolos:

$\overleftrightarrow{ab}$ y leemos recta ab

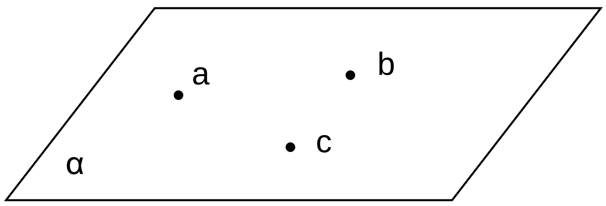
De lo anterior resulta que:

*A una recta pertenecen **infinitos puntos**, pero sólo bastan **dos de ellos** para determinarla.*

♦ ***Por una recta del espacio pasan infinitos planos***



♦ ***Existe un plano y solo uno que pasa por tres puntos no alineados***



Este postulado suele expresarse: “Tres puntos no alineados determinan un único plano al cual pertenecen”

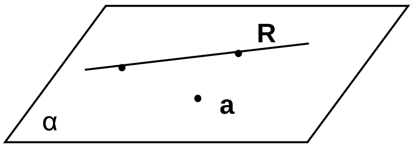
De lo anterior resulta que:

*A un plano pertenecen **infinitos puntos**, pero sólo bastan **tres de ellos no alineados** para determinarlo.*

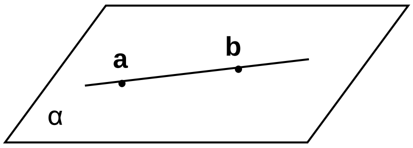
Este postulado suele expresarse***: “Tres puntos no alineados determinan un único plano al cual pertenecen”***

Observaciones:

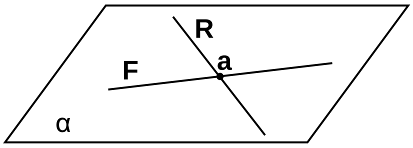
- Una recta y un punto exterior a ella determinan un único plano



- Dos puntos distintos pertenecientes a un plano determinan una recta incluida en él.



- Dos rectas que se intersecan en un punto determinan un plano en el que están incluídas



Problemas

6) ¿Cuántas rectas distintas determinan los vértices de una pirámide de base pentagonal?

7) Considera una pirámide de base cuadrangular. ¿Cuántos planos distintos quedan determinados por sus vértices?.Grafícala

8) ¿Cómo ubicarías cuatro puntos distintos de modo que las rectas determinadas por cada par de ellos sean exactamente cuatro?

9) Dibuja un plano β ,ubica en él los puntos m,s y t no alineados , un punto b colineal con m y s .Además un punto h exterior al plano

Determina si las siguientes afirmaciones son ***V(verdaderas) o F(falsas).***

a) $\{m,s,b\} \subset \beta$

b) h,s y b son coplanares

c) $\overleftrightarrow{mh} \cap \overleftrightarrow{sb} = \varnothing$

d) $\overleftrightarrow{th} \subset \beta$

e) $b \in \overleftrightarrow{ms}$

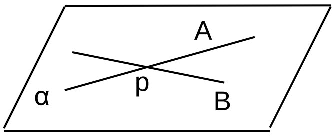
f) h y t están alineados

POSICIONES RELATIVAS

♦ *DE RECTAS*

➢ Dos rectas del espacio incluidas en un plano se llaman ***rectas coplanares***

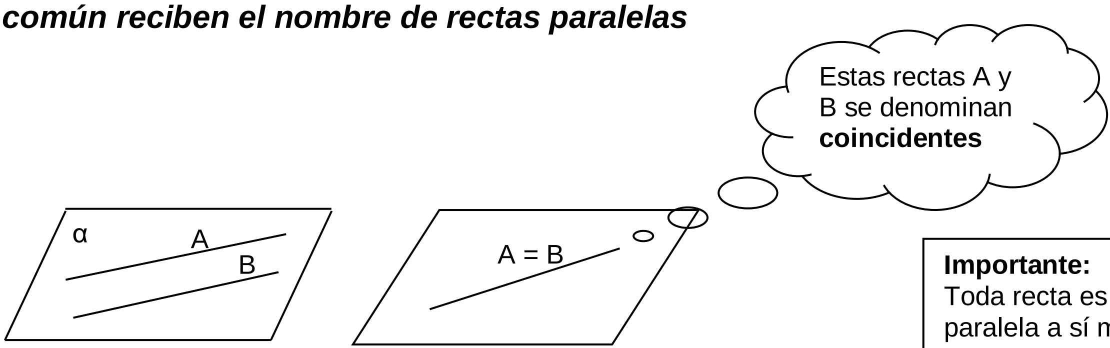
❖ ***Si las dos rectas tienen un sólo punto en común reciben el nombre de rectas secantes***



En símbolos:

$$A \text{ y } B \text{ secantes } \Leftrightarrow A \subset \alpha,\ B \subset \alpha,\ A \cap B = \{p\}$$

❖ ***Si las dos rectas no tienen puntos en común o tienen todos sus puntos en común reciben el nombre de rectas paralelas***

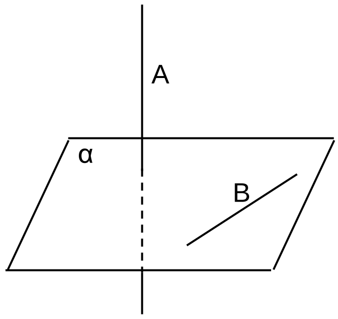


Importante:
Toda recta es paralela a sí misma

En símbolos:

$$A \,//\, B \Leftrightarrow (A \subset \alpha, B \subset \alpha,\ A \cap B = \varnothing \ \vee \ A = B)$$

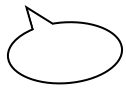
❖ Dos rectas que ***no son coplanares*** (o sea no existe un plano que las contenga) se llaman ***rectas alabeadas***

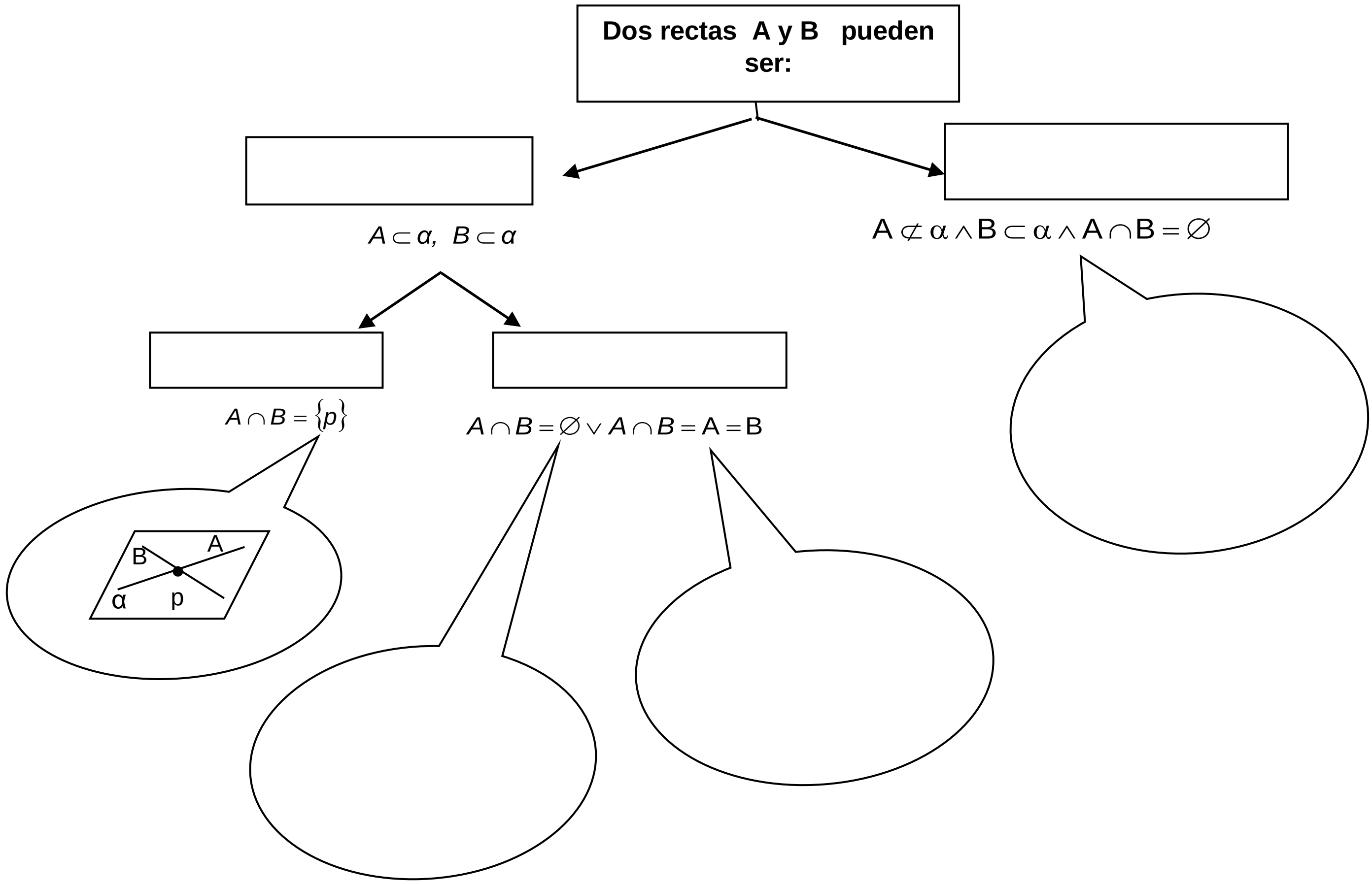


En símbolos:

$$\left.\begin{array}{l} A \not\subset \alpha \\ B \subset \alpha \\ A \cap B = \emptyset \end{array}\right\} \Leftrightarrow A \text{ y } B \text{ son alabeadas}$$

Problema

10) Completa en cada rectángulo con el nombre que identifica la posición relativa de dos rectas según indica su expresión simbólica y en cada llamada  el gráfico correspondiente



Algunas Propiedades importantes
Para el cumplimiento de estas propiedades se consideran elementos de un mismo conjunto

Propiedad Reflexiva: todo elemento esta relacionado con sí mismo

Propiedad Simétrica: si un elemento esta relacionado con otro ,entonces este esta relacionado con el primero.

Propiedad Transitiva: si un elemento esta relacionado con otro y este esta relacionado con un tercero, entonces, el primero esta relacionado con el tercero

Toda relación que sea reflexiva, simétrica y transitiva es una relación de equivalencia

Problemas

11) Analiza si el paralelismo de rectas es una relación de equivalencia ,exprésalo coloquial y simbólicamente

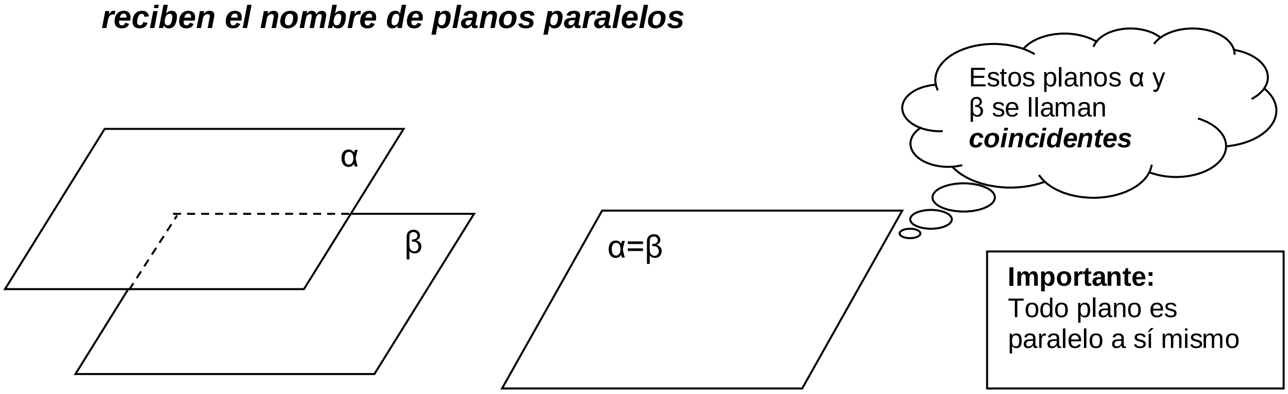
12) Las rectas A; B y C pasan todas por el punto *r*.
   a) ¿Pueden ser dos de ellas alabeadas? ¿Por qué?
   b) Si tomamos un punto $p \neq r$ trazamos por él una recta S paralela a A. ¿La recta S cortará siempre a B?

13) Determina cuáles de las siguientes proposiciones son V(verdaderas) o F(falsas).Justifica

   a) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow A /\!/ B$
   b) $A /\!/ B \Rightarrow A \cap B = \varnothing$
   c) $A \neq B$ y $A /\!/ B \Rightarrow A \cap B = \varnothing$
   d) A y B alabeadas $\Rightarrow A \cap B = \varnothing$

♦ ***DE PLANOS***

❖ ***Si dos planos no tienen ningún punto común o todos sus puntos son comunes reciben el nombre de planos paralelos***

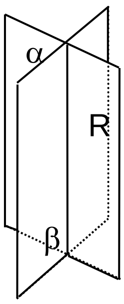


Importante:
Todo plano es
paralelo a sí mismo

En símbolos:

$$\alpha // \beta \Leftrightarrow \alpha \cap \beta = \varnothing \vee \alpha = \beta$$

❖ ***Si dos planos tienen en común sólo una recta reciben el nombre de planos secantes***

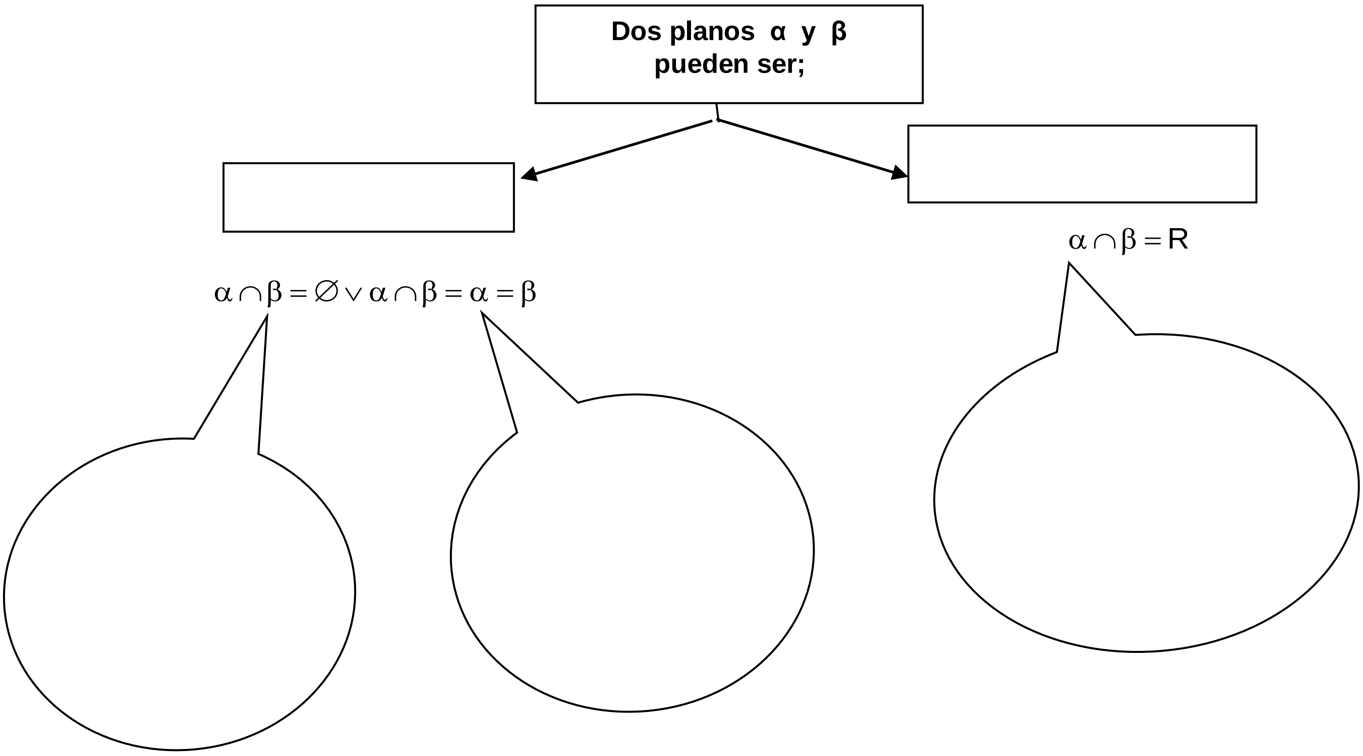


En símbolos

$\alpha \cap \beta = R \Leftrightarrow \alpha$ y β secantes

Problemas

14) Completa en cada rectángulo con el nombre que identifica la posición relativa de dos planos según indica su expresión simbólica y en cada llamada el gráfico correspondiente



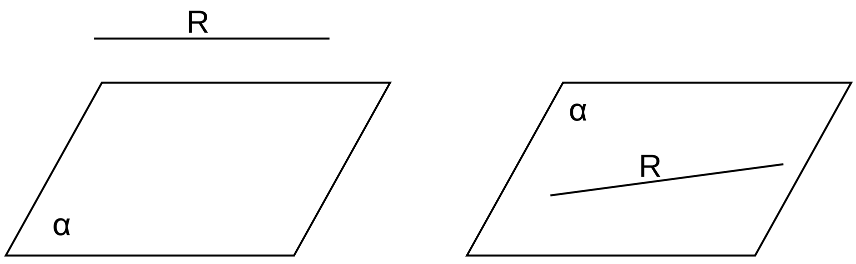
15) Analiza si el paralelismo de planos es una relación de equivalencia ,exprésalo coloquial y simbólicamente

16) Determina justificando la respuesta e ilustrando convenientemente la veracidad o falsedad de los siguientes enunciados:

- $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing \Rightarrow \pi_1 /\!/ \pi_2$
- $\alpha /\!/ \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = \varnothing$
- Los planos β y δ no son paralelos entonces β intersección δ no es vacía
- $\left.\begin{array}{l} \pi_1 /\!/ \pi_2 \\ \pi_2 /\!/ \pi_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \pi_1 /\!/ \pi_3$
- $\alpha /\!/ \alpha$
- $\alpha \cap \beta = \{p\}$

♦ *ENTRE UNA RECTA Y PLANO*

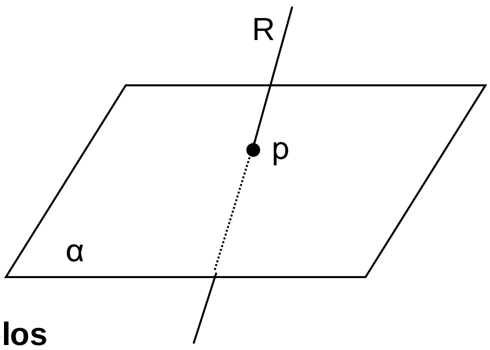
❖ ***Si una recta y un plano no tienen ningún punto común o la recta está incluida en el plano diremos que la recta y el plano son paralelos***



En símbolos:

$$R // \alpha \Leftrightarrow R \cap \alpha = \emptyset \vee R \subset \alpha$$

❖ ***Si una recta y un plano tienen un único punto en común reciben el nombre de secantes***

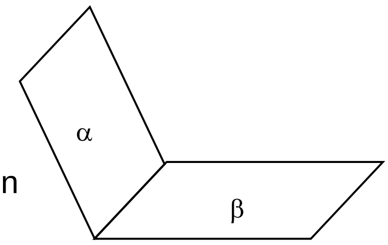


En símbolos

$$R \cap \alpha = \{p\} \Leftrightarrow R \text{ y } \alpha \text{ secantes}$$

Problemas

17) Observa el gráfico



a) ¿Cómo son los dos planos α y β por su posición?

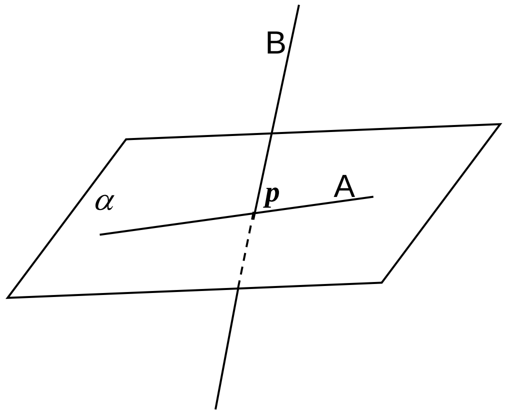
b) Dibuja una recta A que esté incluida en α pero no en β. Expresa simbólicamente

c) Dibuja una recta B que no esté contenida ni en α ni en β pero que corte a ambos. Expresa simbólicamente

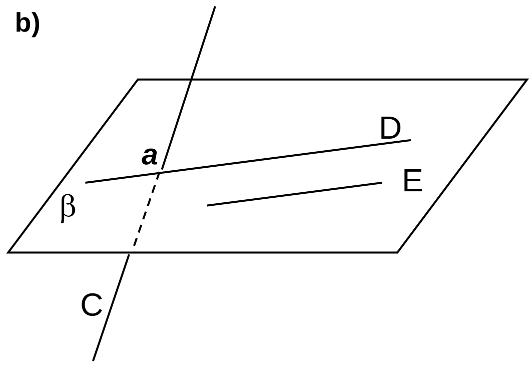
d) Dibuja una recta R paralela a α ¿Cómo puede ser la recta con respecto a β?.¿Qué otras posibilidades hay distintas a la dibujada?

18) Utilizando el lenguaje simbólico describe cada gráfico.

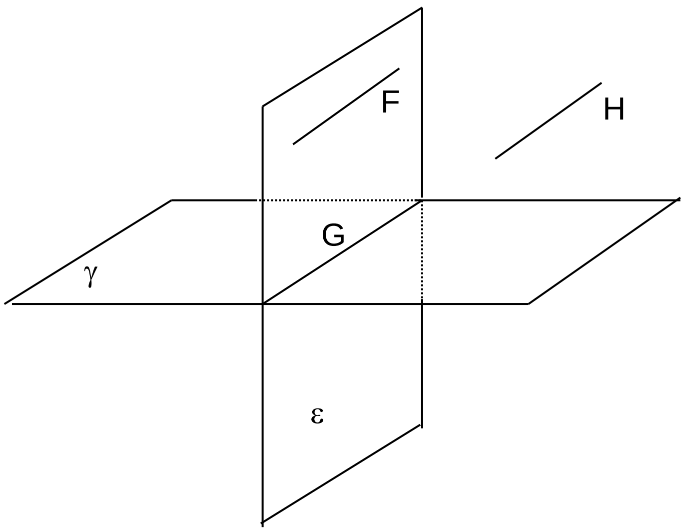
a)



b)



c)



19) Si $\alpha // \beta \wedge \alpha \neq \beta$ y $A \subset \alpha$ y $B \subset \beta$

- ¿Puede ser A // B?.Ilustra tu respuesta
- ¿Puede ser A no paralela a B? Ilustra tu respuesta.
  ¿Qué nombre reciben en este caso las rectas?
- Teniendo en cuenta los apartados anteriores .Determina si es verdadera la siguiente implicancia.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha // \beta \\ A \subset \alpha \\ B \subset \beta \end{array}\right\} \Rightarrow A // B$$

20) Determina la falsedad o veracidad de las siguientes implicancias.

- $\left.\begin{array}{l} A\ //\ \alpha \\ B \cap \alpha = \varnothing \end{array}\right\} \Rightarrow A\ //\ B$

- $\left.\begin{array}{l} \alpha \cap \beta = R \\ A\ //\ R \end{array}\right\} \Rightarrow A\ //\ \alpha \wedge A\ //\ \beta$

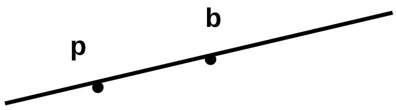
SEMIRRECTA

Definición:

Dada una recta y un punto perteneciente a la misma llamamos **semirrecta** a cada uno de los subconjuntos que quedan determinados en la recta por el punto. Dicho punto se lo llama **origen** de la semirrecta

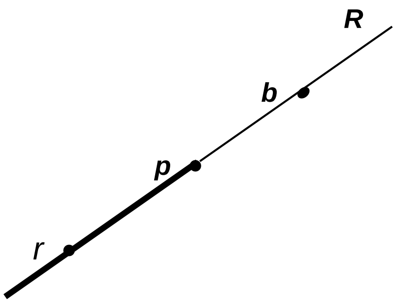
En símbolos: $\overrightarrow{pb}$

Se lee semirrecta de origen p que pasa por b



Semirrectas Opuestas

Las semirrectas que determina un punto sobre una recta se denominan ***semirrectas opuestas***



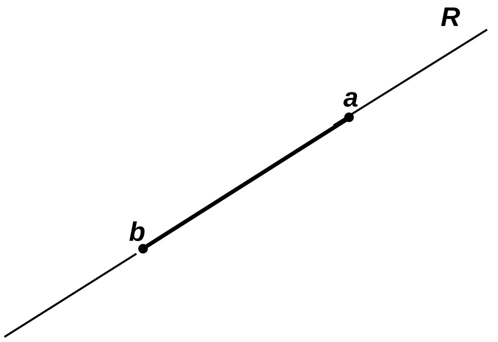
$\vec{pr}$ y $\vec{pb}$ son semirrectas opuestas

En símbolos: $\left.\begin{array}{l} \vec{pr} \cap \vec{pb} = \{p\} \\ \vec{pr} \cup \vec{pb} = R \end{array}\right\} \Leftrightarrow \vec{pr}$ y $\vec{pb}$ son semirrectas opuestas

SEGMENTO

Definición

Dada una recta ***R*** y dos puntos ***a*** y ***b*** pertenecientes a ella, la intersección de las semirrectas $\overrightarrow{ab}$ y $\overrightarrow{ba}$ es el conjunto de puntos llamado ***segmento.*** A los puntos ***a*** y ***b*** se los llama ***extremos del segmento***.



Para recordar
Convenimos en considerar a cualquier punto como un segmento y lo llamamos ***segmento nulo***

En símbolos: $\overrightarrow{ab} \cap \overrightarrow{ba} = \overline{ab}$

Segmentos consecutivos:

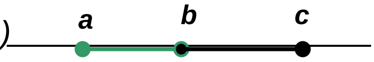
Definición

Dos segmentos que tienen en común únicamente un extremo se llaman **segmentos consecutivos.**

Problema

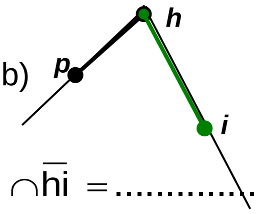
21) Completa la siguiente actividad, a partir de los gráficos dados:

a)



$\overline{ab} \cap \overline{bc} =$ ....
b es el extremo común de ....
$\overline{ab}$ *y* $\overline{bc}$ *son segmentos*...................

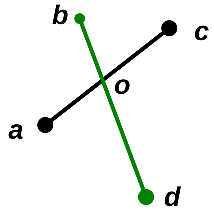
b)



$\overline{ph} \cap \overline{hi} =$ ....
...............es el extremo........ .

$\overline{ph}$ y .... .son segmentos consecutivos

c)



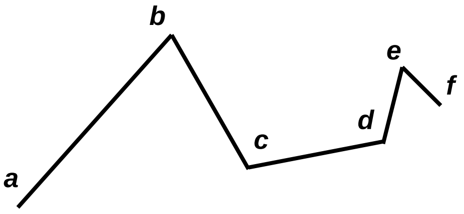
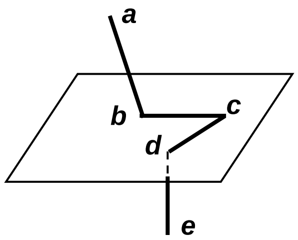
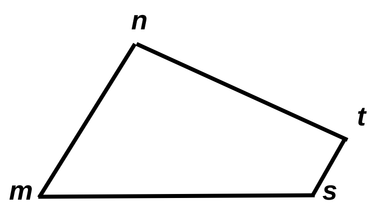
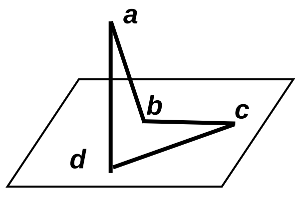
$\overline{ac} \cap \overline{bd} =$ ....
$\overline{ac}$ *y* $\overline{bd}$ .... consecutivos

POLIGONAL:

Definición

Es un conjunto finito de segmentos “sucesivamente consecutivos “, es decir que cada extremo de un segmento es a lo sumo extremo de dos

Ejemplos:

	En el plano	**En el espacio**
Poligonal abierta	 ***Se nombra: poligonal abcdef***	 ***Se nombra: poligonal abcde***
Poligonal cerrada	 ***Se nombra: poligonal mntsm***	 ***Se nombra: poligonal abcda***

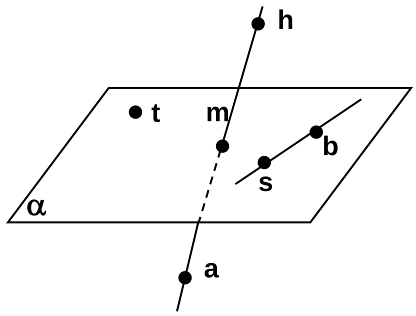
Algunos nombres a tener en cuenta

Por ejemplo, en la poligonal abcdef representada en el cuadro anterior:

- ❖ los segmentos $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$, $\overline{de}$ y $\overline{ef}$ reciben el nombre de **lados** de la poligonal
- ❖ los extremos a, b ,c ,d, e y f de los segmentos se llaman **vértices** de la poligonal
- ❖ el vértice a y f se llaman **extremos** de la poligonal

Problemas

22) Observa la figura y determina cuáles de las siguientes proposiciones son **V**(verdaderas) o **F**(falsas).Justifica



a) $\{m, s, b\} \subset \alpha$

b) $\overleftrightarrow{mh} \cap \overleftrightarrow{sb} = \varnothing$

c) $b \in \overleftrightarrow{ms}$

d) h , s , b son coplanares

e) $\overrightarrow{bm} \cap \overrightarrow{ha} = \varnothing$

f) $\overline{mh} \cup \overrightarrow{ma} = \overleftrightarrow{ha}$

g) $s \in$ poligonal atmba

23) ¿Cuáles de las siguiente proposiciones son **V** (verdadera) o **F** (falsa)?. Justifica las proposiciones falsas.

a) Dos semirrectas coplanares siempre se intersecan

b) Dos semirrectas siempre son coplanares

c) Dos semirrectas del mismo origen son coplanares

d) Tres semirrectas con el mismo origen son coplanares

e) Dos semirrectas siempre tienen un segmento en común.

f) Dos segmentos pueden tener un segmento en común.

g) Una semirrecta y un segmento tienen siempre un segmento en común.

24) Dados a, b, h y d puntos alineados distintos tales que $b \in \overline{ah}$, $h \in \overline{bd}$ y además un punto t tal que $t \notin \overleftrightarrow{ad}$,determina analítica y gráficamente:

a) $\overrightarrow{ab} \cap \overrightarrow{hd}$

b) $\overline{bd} \cap \overline{ah}$

c) $\overleftrightarrow{ab} \cap \overleftrightarrow{dh}$

d) $\overleftrightarrow{ah} \cup \overrightarrow{dh}$

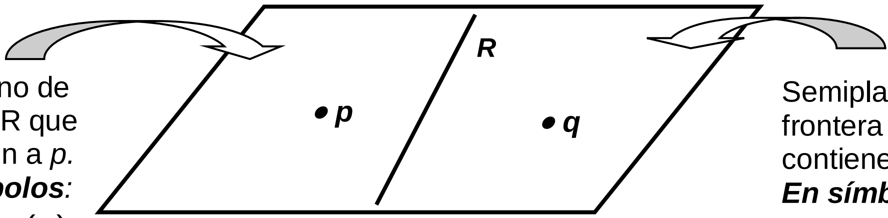
e) poligonal athd $\cap \overline{bh}$

f) poligonal abth $\cup \overline{hd}$

SEMIPLANOS

Definición

Dado un plano y una recta incluida en el mismo llamamos semiplano a cada uno de los subconjuntos que quedan determinados en el plano por la recta. Dicha recta se la llama **frontera** del semiplano



Semiplano de frontera R que contienen a *p.*
En símbolos:
$semp_R(p)$

Semiplano de frontera R que contienen a *q.*
En símbolos:
$semp_R(q)$

Semiplanos opuestos

Los semiplanos que determina una recta en un plano se denominan **semiplanos opuestos**

En símbolos

$$\left.\begin{array}{l} semp_R(p)\cap semp_R(q)=R \\ semp_R(p)\cup semp_R(q)=\alpha \end{array}\right\} \Leftrightarrow semp_R(p) \text{ y } semp_R(q) \text{ son semiplanos opuestos}$$

Problemas

25) Dados $R\subset \pi, a\in \pi \wedge a\notin R, b\in \pi \wedge b\notin R$
   a) ¿Qué puedes afirmar sobre a y b si $\overline{ab}\cap R=\varnothing$?
   b) ¿Qué puedes afirmar sobre a y b si $\overline{ab}\cap R\neq\varnothing$?

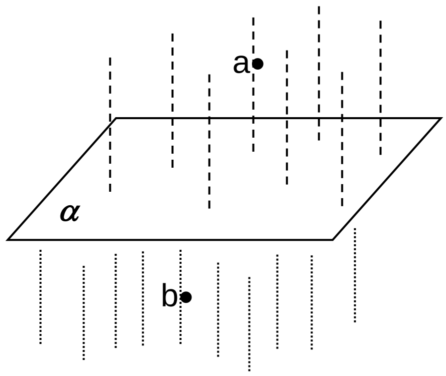
26) En cada apartado realiza el gráfico de dos semiplanos tales que :
   a) Tengan la misma frontera y estén incluidos en el mismo plano.
   b) Tengan la misma frontera y no estén incluidos en el mismo plano.
   c) Tengan distinta frontera y estén incluidos en un mismo plano

27) Si se sabe que : $A \subset \alpha, b \in \alpha, c \in \alpha, d \in \alpha,\ \overline{bc} \cap A = \{e\},\ \overline{bd} \cap A = \varnothing$

a) Realiza un gráfico que contemple la situación descripta según los datos.
b) Empleando los elementos nombrados simboliza de todas las formas posibles los semiplanos determinados en **α** por A
c) Nombra el semiplano en el que está incluida $\overrightarrow{\mathbf{ed}}$.
d) ¿Puede ser $\overline{dc} \cap A = \varnothing$?.Justifica tu respuesta.

SEMIESPACIOS

Dado un plano α , llamamos **semiespacio** a cada uno de los subconjuntos que quedan determinados por el plano en el espacio. Dicho plano se lo llama **frontera** del semiespacio



El **semiespacio de frontera α que contiene al punto *a* ,** se simboliza

$$\text{semiesp}_{\alpha}(a)$$

y el **semiespacio de frontera α que contiene al punto *b***

$$\text{semiesp}_{\alpha}(b)$$

Semiespacios opuestos

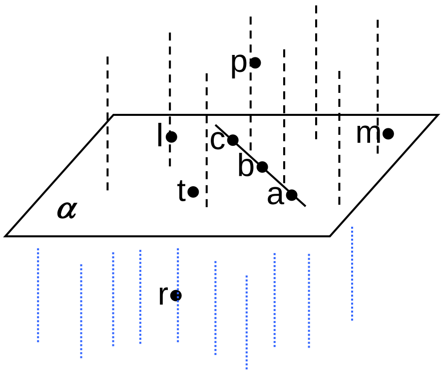
Decimos que dos semiespacios que determina un plano en el espacio son ***semiespacios opuestos.***

En símbolos

$$\left.\begin{array}{l} semiesp_{\alpha}(a) \cap semiesp_{\alpha}(b) = \alpha \\ semiesp_{\alpha}(a) \cup semiesp_{\alpha}(b) = R^3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow semiesp_{\alpha}(a) \text{ y } semiesp_{\alpha}(b) \text{ son semiespacios opuestos}$$

Problema

28) Observa el gráfico y completa el siguiente texto .



En la figura se observan dos semiespacios opuestos que se llaman …………………y…………..

La recta $\overleftrightarrow{\mathbf{pr}}$ **y el plano α** tienen ………………..en común

La recta $\overleftrightarrow{ac} \subset \alpha$ determina en **α** dos ……………… opuestos que se nombran …………….y……………

Como l y t , que no pertenecen a $\overleftrightarrow{ac}$,pertenecen a un mismo semiplano respecto de $\overleftrightarrow{ac}$ resulta $\overline{lt} \cap \overleftrightarrow{ac} = ...$,en cambio $\overline{tm} \cap \overleftrightarrow{ac} = ...$

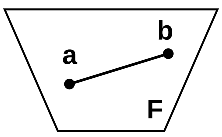
l, t, a, b, c y m son puntos …………..por pertenecer todos al …………………..

p es …………a **α** . t es …………….a $\overleftrightarrow{ac}$.

FIGURA CONVEXA

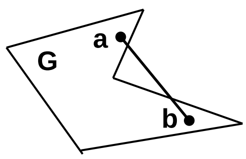
Una figura es **convexa** si dos puntos cualesquiera de ella, son los extremos de un segmento contenido en la figura

IMPORTANTE
Admitiremos que la figura formada por un solo punto es convexa



F es una figura convexa.

$\forall\ a , b \in F$ resulta : $\overline{ab} \subset F$

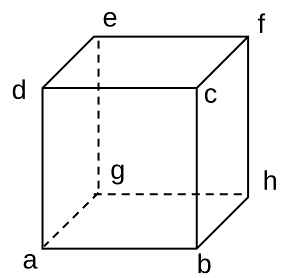


G no es una figura convexa
o G es cóncava

$\exists\ a ; b \in G\ /\ \overline{ab} \not\subset G$

Problema

29) Observa el prisma representado en la figura y completa



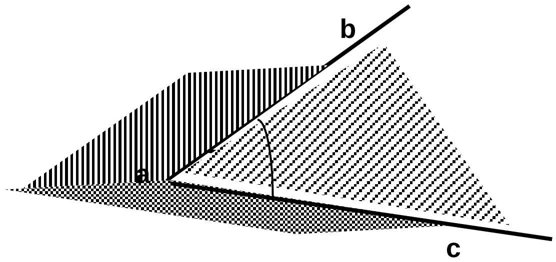
a) La intersección entre el plano que contiene a la cara abcd y $\overline{bc}$ es una figura . ...
b) $\overline{hf} \cup \overline{fe}$ es una figura ....
c) El punto .... es una figura ....
d) La poligonal cfedc es una figura ....
e) $\overrightarrow{dc} \cap \overrightarrow{cd}$ es una figura ....
f) $\overleftrightarrow{cb} \cup \overline{bc}$ es una figura ....
g) $\overline{gb} \cup \overline{gf}$ es una figura ....
h) La intersección no vacía de dos figuras convexas es una figura ....
i) La unión de dos figuras convexas a veces es una figura ....

ÁNGULO PLANO

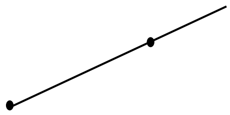
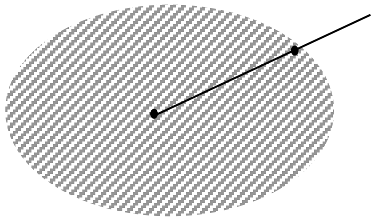
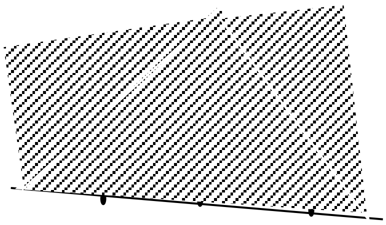
Las semirrectas $\overrightarrow{ab}$ *y* $\overrightarrow{ac}$**,** con origen común, determinan dos subconjuntos del plano cada uno de los cuales se denomina ángulo ; las semirrectas se llaman **lados de los ángulos** y el punto ***a*** es el ***vértice*** de los mismos.

Para nombrarlos utilizaremos las siguientes formas:

- $\hat{bac}$ o $\hat{a}$ cuando el ángulo es convexo
- $\hat{bac}_{conc}$ o $\hat{a}_{conc}$ cuando el ángulo es cóncavo

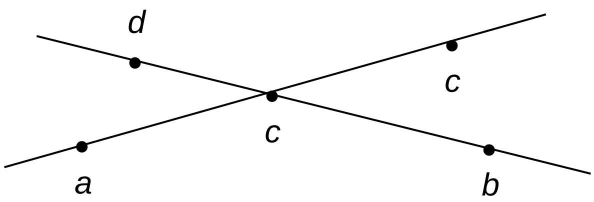


Algunos ángulos especiales

Lenguaje Coloquial	Lenguaje gráfico	Lenguaje simbólico
Angulo Nulo Es una semirrecta Sus lados son coincidentes		$\hat{N}$
Angulo Pleno Es un plano Sus lados son coincidentes		$\hat{V}$
Angulo Llano Es un semiplano. Sus lados son semirrectas opuestas.		$\hat{L}$

Problema

30) De acuerdo con este gráfico:



Calcula:

a) $semp_{\overleftrightarrow{ac}}(b) \cap semp_{\overleftrightarrow{db}}(c) =$

b) $semp_{\overleftrightarrow{ac}}(b) \cup semp_{\overleftrightarrow{db}}(c) =$

c) $\widehat{aod} \cap \overrightarrow{od} =$

d) $\widehat{aod} \cap \widehat{cob} =$

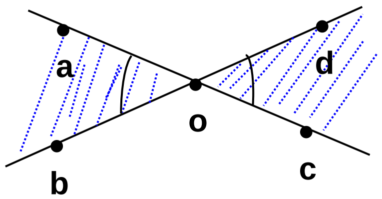
e) $\widehat{cod} \cup \widehat{cob} =$

Pares de ángulos particulares

➢ Ángulos opuestos por el vértice

Es aquel par de ángulos que tienen un vértice en común y sus lados son semirrectas opuestas.

Gráficamente:



En símbolos indicamos

$$\overrightarrow{oa} \cup \overrightarrow{oc} = \overleftrightarrow{ac}$$

$$\overrightarrow{ob} \cup \overrightarrow{od} = \overleftrightarrow{bd}$$

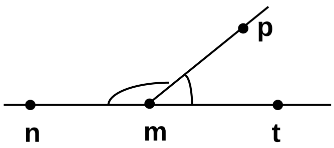
$$\widehat{aob} \cap \widehat{cod} = \{o\}$$

Luego indicamos $\widehat{aob}$ y $\widehat{cod}$ son opuestos por el vértice

➢ Ángulos adyacentes

Es aquel par de ángulos que tienen un lado en común y los otros dos lados son semirrectas opuestas.

Gráficamente



En símbolos indicamos

$$\overrightarrow{mn} \cup \overrightarrow{mt} = \overleftrightarrow{nt}$$

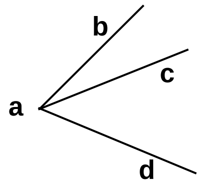
$$\widehat{nmp} \cap \widehat{pmt} = \overrightarrow{mp}$$

Luego $\widehat{nmp}$ y $\widehat{pmt}$ son ángulos adyacentes

➢ Ángulos Consecutivos

Dos ángulos son **consecutivos** si solo poseen en común un lado

Gráficamente



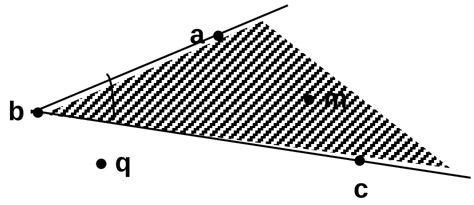
En símbolos: $\widehat{bac} \cap \widehat{cad} = \overrightarrow{ac}$

Luego $\widehat{bac}$ y $\widehat{cad}$ son ángulos consecutivos

A continuación te damos algunos nombres que utilizaremos con frecuencia.

- Si un punto pertenece al ángulo y no a sus lados se dice que es **interior** a dicho ángulo

- Si un punto no pertenece al ángulo se dice que es **exterior** a dicho ángulo



m interior a $\widehat{abc}$ **q** exterior a $\widehat{abc} \Leftrightarrow q \notin \widehat{abc}$

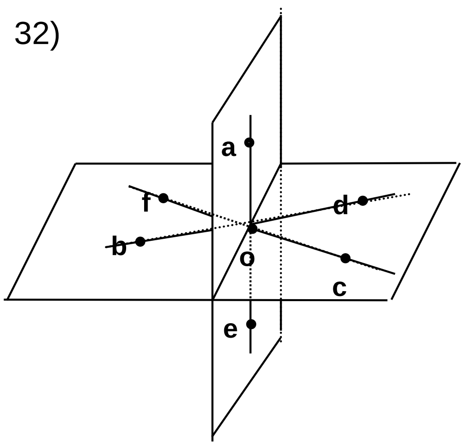
Problemas

31) Responde y justifica tu respuesta:

a) ¿Dos ángulos adyacentes son consecutivos?

b) ¿Dos ángulos consecutivos son adyacentes?

32)



Observa la figura y responde **verdadero** o **falso** .

a) $\widehat{aod}$ y $\widehat{eoc}$ son opuestos por el vértice

b) $\widehat{doc}$ y $\widehat{coe}$ son adyacentes

c) $\widehat{eob}$ y $\widehat{eod}$ son consecutivos adyacentes

d) $\vec{of} \subset \widehat{aob}$

e) $\vec{oa}$ es un ángulo nulo

f) $\widehat{eob}$ es un ángulo llano

g) c es exterior al $\widehat{doc}_{conc}$

h) $\widehat{bof} \cap \widehat{fod} = \vec{of}$

BIBLIOGRAFIA

- **PREM 7 . Buschiazzo – Filipputti – González – Lagreca L- Lagreca N – Strazziusso . UNR EDITORA - Marzo 2005-Rosario - Argentina**
- **ESTRUCTURAS MODULARES PARA LA ENSEÑANZA SECUNDARIA (Aula Taller) Estructura Modular I GEOMETRÍA MÉTRICA – FIGURAS GEOMÉTRICAS ELEMENTALES– B de Gonzalez Beltrán- Hinrichsen - Cattaneo L. - Rosario - Argentina**
- **GEOMETRIA . Clemens - O'Daffer - Cooney . Editorial Addison Wesley Longman - Mayo 1998 – México D.F.**
- **GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA . Dr.J.A. Baldor . Grupo Editorial PATRIA . Reimpresión 2009 – México D.F.**
- **GEOMETRIA 2 - S.Selzer - Editorial Kapelusz- Marzo 1969- Buenos Aires- Argentina**